Date : / / Subject:

تعريف:

التماثل المستمر:

نطلق على التطبيق $f: (X,\tau) \longrightarrow (Y,\acute{\tau})$ أنه تقابل طبولوجي

مستمر إذا كان تقابل، مستمراً هو ومعكوسه

f: تقابل (غامر ومتباين)

f: مستمر

f^{-1}: مستمر

* نقول عن فضائين طبولوجيين أنهما متكافئين إذا وجد بينهما هوموموريزم

(واحد لأول).

٨٣

* التطبيقات المفتوحة والمغلقة:

لاحظنا خلال دراستنا للاستمرار أن الحديث يجري دوماً عن الصورة المباشرة.

بالنسبة لهذه الصورة المباشرة نعرف الآتي:

- نقول عن التطبيق $f: X \longrightarrow Y$ من فضاء طبولوجي X إلى فضاء طبولوجي Y أنه مفتوح

إذا كانت الصورة المباشرة وفقه لأي مجموعة مفتوحة هو مجموعة مفتوحة

ونقول عن التطبيق f أنه مغلق إذا كانت الصورة المباشرة وفقه لأي مجموعة

مغلقة هي مجموعة مغلقة.

* مثال 1:

لنأخذ التطبيق نأخذ الدالة $h: R \longrightarrow R$

المعرفة بالشكل الآتي $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

هذا التطبيق مستمر ولكنه ليس مفتوحاً وليس مغلقاً

الحل:

نيم الدالة $]0,1]$

$$f(R) =]0,1]$$

R مفتوحة بينما $f(R)$ صورته المباشرة غير مفتوحة R مغلقة وصورتها المباشرة

مغلقة.

مثال 2:

لنأخذ التطبيق $f: R \longrightarrow R$

Date : / / Subject:

و يأخذ الدالة المعرفة بالشكل الأتي:

$$y = f(x) = 2$$

الحل:

نفرض أن u مجموعة مفتوحة في المستقر هناك احتمالان

الأول $x = 2 \in u$ عندها الصورة العكسية لـ u تقول: $R = f^{-1}(u)$

الثاني $x = 2 \notin u$ عندها الصورة العكسية لـ u تقول: $\emptyset = f^{-1}(u)$

وبالتالي هذا التطبيق مستمر وهو مغلق لأن A مجموعة مغلقة في المنطلق R فإن: $f(A) = \{2\}$ وهي مجموعة وحيدة العنصر ومجموعة وحيدة العنصر مغلقة في R

ولو أخذنا أي مجموعة مفتوحة في R ولتكن G، $f(G) = \{2\}$ والمجموعة وحيدة العنصر هي مجموعة غير مفتوحة

* مبرهنة:

ليكن f: $f : X \to Y$ تقابلاً بين الفضاء X والفضاء Y إن القضايا التالية متكافئة:

1- f هوموموروفيزم

2- f مستمر ومفتوح

3- f مستمر ومغلق

الشرط الأول يعني أن: f مستمر و f^{-1} مستمر

الشرط الثاني يعني أن: f مستمر و f مفتوح

الشرط الثالث يعني أن: f مستمر و f مغلق

البرهان

كون f^{-1} مستمر $\Rightarrow$ f مفتوح $\Longleftrightarrow$ f مغلق

وأن $f^{-1} : Y \to X$ مستمر

لتكن u مجموعة مفتوحة في X وبما أن f^{-1} مستمر فالصورة العكسية وفقه هي مجموعة مفتوحة في Y أي $(f^{-1})^{-1}(u)$

ولكن: $(f^{-1})^{-1}(u) = f(u)$

و يكرر نفس الشيء بالنسبة لمجموعة مغلقة

مثال :

لنأخذ التطبيق $f: R \longrightarrow R$

ولنأخذ الدالة المعرفة بالشكل : $y = 2x + 3$

- f هومومورفيزم لان f تقابل وهو مستمر (لان الدالة خطية)

و f^{-1} مستمر لان الدالة العكسية للدالة المعطاة مستمرة $x = \frac{y-3}{2} = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$

وان f مغلق ومفتوح كونه هومومورفيزم

- لنأخذ مجال مفتوح $]a,b[$ $f^{-1}(]a,b[) =$

$=]\frac{a-3}{2}, \frac{b-3}{2}[$

الدالة العكسية لمجال مفتوح هي مجال مفتوح وبالتالي التطبيق مستمر

* تمرين :

لنفرض ان $f: X \longrightarrow Y$ هومومورفيزم اثبت ان الصورة المباشرة لاي جوار للنقطة x (لنقطة كيفية من X) هو جوار للنقطة $f(x)$.

حيث U جوار كيفي لـ x فان $f(U)$ جوار لـ $f(x)$

البرهان :

بما ان U جوار فحسب تعريف الجوار يوجد مجموعة مفتوحة u بحيث $x \in u \subseteq U$

ومنه $f(x) \in f(u) \subseteq f(U)$

كون f مفتوح فالمجموعة $f(u)$ مجموعة مفتوحة في Y وهذا يعني ان $f(U)$ جوار

* مبرهنة :

يكون التطبيق $f: X \longrightarrow Y$ مغلقاً اذا وفقط اذا تحققت العلاقة الآتية:

$$f(\bar{A}) \supseteq \overline{f(A)}$$

من اجل اي مجموعة جزئية $X \supseteq A$

البرهان :

⇐ لنفرض ان f مغلق ولنأخذ مجموعة كيفية A من X لدينا دوماً :

$$f(\bar{A}) \supseteq f(A) \Leftarrow \bar{A} \supseteq A$$

ومنه فان : $\overline{f(\bar{A})} \supseteq \overline{f(A)}$

بما ان اللصاقة $\bar{A}$ مجموعة مغلقة و f تطبيق مغلق فالمجموعة $f(\bar{A})$ مغلقة وبالتالي تساوي لصاقتها $f(\bar{A}) \supseteq \overline{f(A)}$

⇐ لنفرض ان العلاقة وسنثبت ان التطبيق مغلق

Date : / / Subject:

وحتى نبرهن أنه مغلقة يجب أخذ مجموعة مغلقة ونبين أن صورتها المباشرة مغلقة

لنأخذ مجموعة A مغلقة وكونها مغلقة فإن ، $A = \bar{A}$

ومنه $f(A) = f(\bar{A})$ ومن الغرض $f(A) = f(\bar{A}) \supseteq \overline{f(A)}$

$f(A)$ مغلقة وبالتالي تحوي لصاقتها وبالتالي التطبيق مغلق

مبرهنة :

يكون التطبيق $f : X \longrightarrow Y$ مفتوحاً إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$f(A^{\circ}) \subseteq f(A)^{\circ}$ من أجل أي A من X

البرهان :

$\Longleftarrow$ f مفتوح ولتكن A $X \supseteq A$ ولدينا دوماً $A \supseteq A^{\circ}$

ومنه $f(A) \supseteq f(A^{\circ}) \Longleftarrow (f(A))^{\circ} \supseteq (f(A^{\circ}))^{\circ}$
$= f(A^{\circ})$

$\Longleftarrow$ نأخذ مجموعة مفتوحة فيكون ، $f(A) = f(A^{\circ}) \subseteq (f(A))^{\circ}$

وبالتالي التطبيق مفتوح